LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 5

Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora

Lekcije iz Matematike 1.

5. Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obradjuju skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora i njihova veza s kutom medju vektorima, površinom paralelograma koje razapinju dva vektora i obujmom paralelepipeda kojeg razapinju tri vektora.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

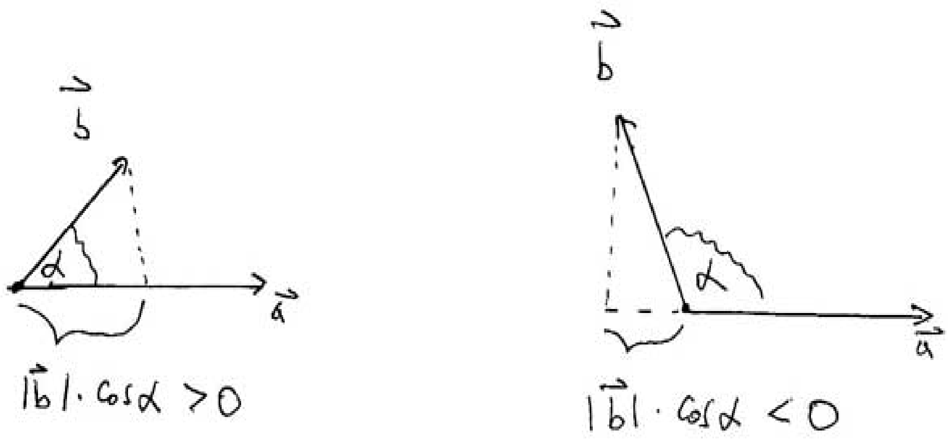
Vidjeli smo da rezultanta djelovanja dviju sila ne ovisi samo o njihovim veličinama već i o kutu pod kojim one djeluju. Problem odredjivanja tog kuta matematički se rješava pomoću skalarnog produkta.
Pokus pokazuje da na električnu česticu koja se giba u nekom magnetskom polju, u svakoj točki djeluje inducirana sila koja je okomita i na smjer brzine čestice u toj točki i na smjer sile magnetskog polja, a po veličini je proporcionalna veličini sile magnetskog polja, veličini brzine čestice i naboju čestice. Ako se fizikalne jedinice usklade, onda je koeficijent proporcionalnosti sinus kuta izmedju vektora brzine i sile magnetskog polja (dakle sila je najveća ako je brzina okomita ma magnetsko polje, a iščezava ako brzina i magnetsko polje imaju isti smjer) .
To se matematički rješava pojmom vektorskog produkta vektora.
Pomoću vektorskog produkta lako se računa površina pararlelograma što ga razapinju dva vektora, a pomoću mješovitog obujam paralelepipeda što ga razapinju tri vektora.

III. Potrebno predznanje

Ovo je potpuno novo gradivo; za razumijevanje je potrebno ponoviti pojam vektora i kuta medju vektorima i pojam determinante.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Skalarni produkt vektora. Ova je tema blisko povezana s pojmom kuta medju vektorima i s pojmom **projekcije** vektora na vektor. Pogledajmo dva primjera vektora i kuta medju njima (sl.1).



Sl. 1.

Vidimo da se izraz $|\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha$ prirodno javlja pri projekciji vrha vektora $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$. Točnije taj izraz mjeri duljinu projekcije vektora $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$ skupa s predznakom (koji je pozitivan ako je kut šiljast, tj. ako projekcija ima isto usmjerenje kao i $\overrightarrow{a}$, a negativan ako je kut tup, tj. ako projekcija ima suprotno usmjerenje). Ako taj izraz pomnožimo s $|\overrightarrow{a}|$ dobijemo **skalarni produkt (umnožak)** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ vektora $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$. Dakle

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} := |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha$$

Očita svojstva skalarnog produkta.

1. (**komutativnost**) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

2. $(\lambda\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}) \cdot (\lambda\overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$.

3. $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$ (jer je $\cos 0^\circ = 1$)

$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0$ (jer je $\cos 90^\circ = 0$)

Neočito svojstvo skalarnog produkta - distributivnost

$$\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$$

(dogovor je da je operacija skalarnog množenja višeg reda u odnosu na zbrajanje, pa pri zapisu desne strane jednakosti ne trebaju zagrade).

Formula za skalarni produkt u koordinatnom sustavu - analitički pristup. Koristeći se očitim svojstvima i distributivnošću, dobijemo:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 c_3$$

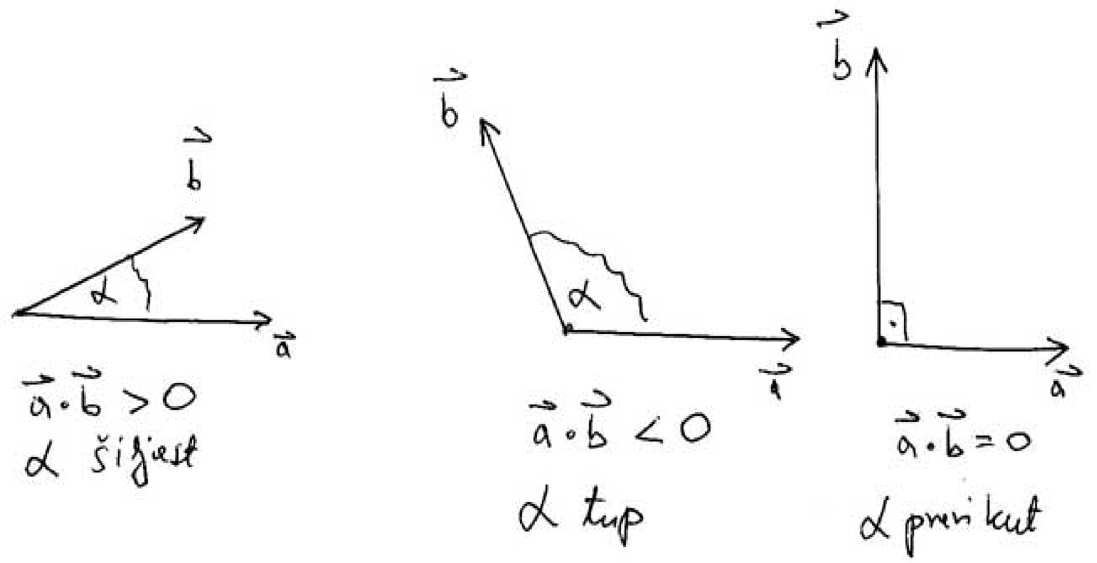
gdje je $\overrightarrow{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{i} + a_2 \cdot \overrightarrow{j} + a_3 \cdot \overrightarrow{k}$, a $\overrightarrow{b} = b_1 \cdot \overrightarrow{i} + b_2 \cdot \overrightarrow{j} + b_3 \cdot \overrightarrow{k}$.

Primjer 1:
(i) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, a $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, onda je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 = 7$
Tu je skalarni produkt pozitivan, to znači da je kut medju vektorima šiljast.

(ii) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, a $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, onda je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 0$
Tu je skalarni produkt jednak nuli, to znači da su vektori okomit.

(iii) Ako je $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, a $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$, onda je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -3$
Tu je skalarni produkt negativan, to znači da je kut medju vektorima tup.

Vrijedi općenito:
Kut medju vektorima je šiljast ako i samo ako je skalarni produkt > 0.
Kut medju vektorima je tup ako i samo ako je skalarni produkt < 0.
Vektori su okomiti ako i samo ako je skalarni produkt $= 0$ (to je **uvjet okomitosti** dvaju vektora (sl.2).



sl. 2.

Na primjer, različiti jedinični vektori medjusobno su okomiti, i zaista vrijedi

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0$$

Skalarni produkt vektora sa sobom - duljina vektora. Ako je $\overrightarrow{v} = a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}$ onda je

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} := a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c = a^2 + b^2 + c^2 = |\overrightarrow{v}|^2$$

Dakle

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$$

Kut medju vektorima. Pomoću skalarnog produkta možemo lako odrediti kut medju vektorima (a ne samo provjeriti je li taj kut šiljast, tup ili pravi). Naime, vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

gdje je α mjera kuta medju vektorima (to je samo malo drukčije napisana formula za skalarni produkt).

Primjer 2. Za vektore iz Primjera 1. vrijedi:
(i) $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} = \frac{7}{29}$ pa je, približno $\alpha = 76°1'55''$.

(ii) Tu je $\cos\alpha = 0$ pa je $\alpha = 90°$ kako smo i prije rekli.

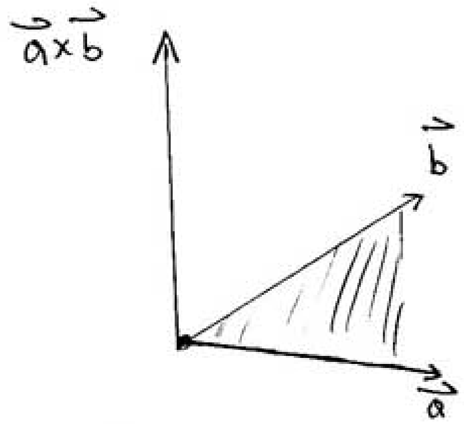
(iii) Tu je $\cos\alpha = -\frac{3}{29}$ pa je, približno, $\alpha =$.

Vektorski produkt (umnožak) vektora. Oslanjajući se na fizikalnu predodžbu o sili koja se javlja pri gibanju električne čestice kroz magnetsko polje, dolazimo do sljedeće **geometrijske definicije** vektorskog produkta dvaju vektora.

Vektorski produkt vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ jest vektor

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

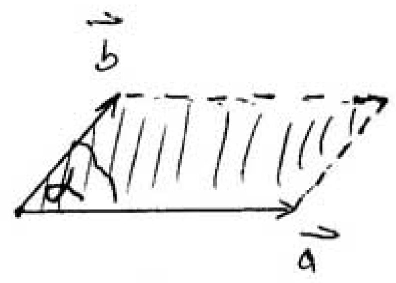
zadan smjerom, duljinom i orijentacijom ovako (sl.3):



sl. 3.

(**smjer**) $\vec{c}$ je okomit i na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$

(**duljina - površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$**) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$ gdje je α kut medju vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ (sl.4).



$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

Sl. 4

(**orijentacija - pravilo desne ruke**) Gledajući s vrha vektora $\vec{c}$, gibanje od vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ kroz kut α odvija se suprotno kazaljci na satu (drugim riječima vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ čine konfiguraciju poput $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Uvjet na duljinu pišemo kao:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$$

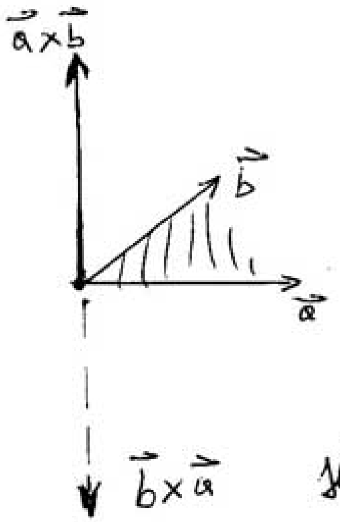
Iz te formule dobije se važan kriterij kolinearnosti vektora:

Vektori su kolinearni ako i samo ako je njihov vektorski umnožak nula.

Naime, kažemo dva su dva vektora kolinearna ako imaju isti smjer, tj. ako se jedan od njih može dobiti iz drugoga množenjem sa skalarom; to znači da je kut medju njima od $0°$ (ista orijentacija) ili od $180°$ (suprotna orijentacija), ili ako je neki od njih nul-vektor (tada se kut ne definira, ali, prema dogovoru uzimamo da je vektorski umnožak nula).

Očita svojstva vektorskog produkta.

1. (**Antikomutativnost**): $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (iz orijentacije) (sl.5)



sl.5.

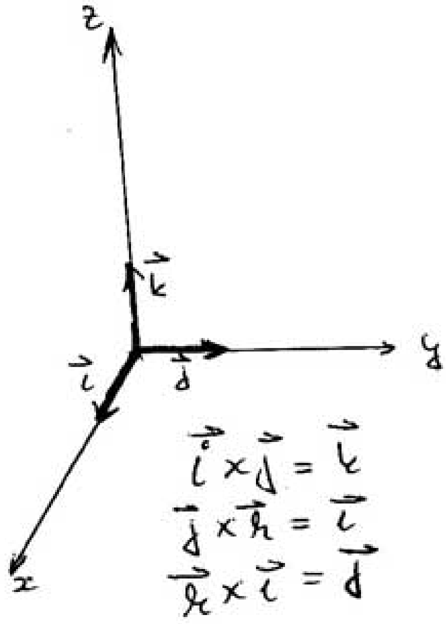
2. $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (jer je tu nul-kut; to takodjer izlati iz 1. ako stavimo $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$).

3. $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}(\lambda \times \overrightarrow{b})$

4.
$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$$

(sl.6.)



Sl. 6.

Neočito svojstvo vektorskog umnoška
5. **Distributivnost na zbrajanje:** $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
(dogovor je da je operacija vektorskog množenja višeg reda u odnosu na zbrajanje pa ne trebaju zagrade).

Formula za vektorski produkt u koordinatnom sustavu - analitička formula.
Koristeći se gornjim očitim svojstvima i distributivnošću, dobijemo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Primjer 3. Odredimo vektorski umnožak vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i površinu paralelograma što ga oni razapinju.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 18\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-17)^2 + 18^2 + (-5)^2} = \sqrt{636}$$

Mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - to je **broj** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Računanje mješovitog produkta u koordinatnom sustavu - analitička formula

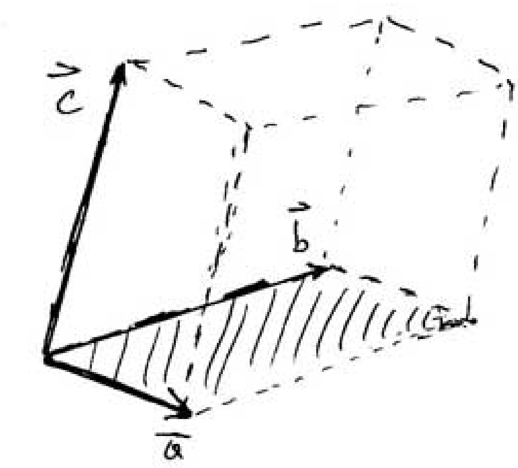
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Primjer 4. Odredimo mješoviti produkt vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -62$$

Geometrijsko značenje mješovitog produkta

Uočimo paralelepiped razapet vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, tj. kosu prizmu kojoj je baza paralelogram razapet vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, a treći joj je brid odredjen vektorom $\vec{c}$ (sl.7).



Sl. 7.

Tada je

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

tj. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$ (predznak je $+$ ili $-$ ovisno o tome čine li vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (u tom redoslijedu) desni sustav ili ne, tj. čine li oni konfiguraciju poput $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ili ne (pravilo desne ruke).
Na primjer vektori iz Primjera 4. razapinju paralelogram obujma 62 (broj -62 koji je jednak mješovitom produktu neki zovu **orijentirani obujam**).

Očito svojstvo mješovitog produkta. Ako u izrazu $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ dva vektora zamijene mjesta, izraz ostaje isti ili samo promijeni predznak (to je zato što se obujam ne mijenja, jer uvijek ostaje isti paralelepiped). Još preciznije, vrijedi:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}$$

dok se za tri preostale kombinacije predznak mijenja.

V. Pitanja i zadaci